STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 9 h

Der Einflusz eines homogenen Zeit-abhängigen Windfeldes auf ein rotierendes Meer mit einem halb-unendlichen Hindernis.

von

H. A. Lauwerier

1958

Sonderdruck aus
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik
Akademie-Verlag
Band 38 Heft 7/8 Juli/August 1958

Der Einfluß eines homogenen Zeit-abhängigen Windfeldes auf ein rotierendes Meer mit einem halb-unendlichen Hindernis *)

Von *H. A. Lauwerier* in Amsterdam

Diese Arbeit geht hervor aus einer Untersuchung nach dem Einfluß von Stürmen auf die Nordsee [1]). In diesem Vortrage wird besonders die analytische Methode hervorgehoben. Auf numerische Anwendungen müssen wir hier wegen Raummangel verzichten [2]).

Wir betrachten ein unendlich ausgedehntes Meer konstanter Tiefe, das durch die x, y-Ebene dargestellt wird. Wenn die Erhöhung der Meeresoberfläche infolge eines homogenen Windfeldes, d. h. unabhängig vom Ort, mit $\zeta(x, y, t)$ angedeutet wird, genügt die Laplace Transformierte $\bar{\zeta}(x, y, p)$ von ζ der Helmholtzschen Gleichung

$$(\Delta - q^2)\bar{\zeta} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

mit

$$q^2 = p(p+\lambda) + \frac{p\,\Omega^2}{p+\lambda}, \qquad q \geq 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

wo λ eine Reibungskonstante und Ω der Coriolis-Koeffizient ist. Die positive x-Achse sei ein Hindernis. Dann genügt $\bar{\zeta}$ auf beiden Seiten dieses Hindernisses der Randbedingung

$$\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial y} - \operatorname{tg}\gamma\,\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x} = \bar{W}(p) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

mit

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\Omega}{p+\lambda}, \qquad 0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

und wo $\bar{W}(p)$ die Laplace Transformierte der Kraft $W(t)$ ist, welche der Wind auf die Meeresoberfläche ausübt.

Wir machen jetzt den folgenden Ansatz

$$\bar{\zeta}(x, y, p) = \frac{\bar{W}}{2\pi q}\int_{-\infty}^{\infty} \exp - q\left\{i\,x\,z + |y|\sqrt{1+z^2}\right\}\left\{F(z) + \frac{y}{|y|}\,G(z)\right\} dz \quad \ldots \quad (5).$$

Die zunächst unbekannten Funktionen F und G sind zu bestimmen aus der Randbedingung (3) und aus der Kontinuität von $\bar{\zeta}$ und $\partial\bar{\zeta}/\partial y$ an der negativen x-Achse. Wir erhalten daraus die folgenden Beziehungen

$$F(z) = \frac{i\,z\operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{1+z^2}}\,G(z) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iqxz}\,\Phi^{+}(z)\,dz = 0 \quad \text{nur für} \quad x > 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iqxz}\,\Phi^{-}(z)\,dz = 0 \quad \text{nur für} \quad x < 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

mit

$$\Phi^{+}(z) = G(z) \text{ und } \Phi^{-}(z) = \frac{z^2+\cos^2\gamma}{\sqrt{1+z^2}}\,G(z) + \frac{i}{z+\varepsilon\,i} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9),$$

wo ε eine beliebig kleine positive Größe ist.

Die Einführung von ε kommt darauf hinaus, daß zum rechten Glied von (3) der Konvergenz erzwingende Faktor $e^{-qx\varepsilon}$ hinzugefügt worden ist. Aus (7) und (8) folgern wir, daß $\Phi^{+}(z)$ bzw. $\Phi^{-}(z)$ eine im Unendlichen verschwindende holomorphe Funktion in der oberen bzw. unteren

*) H. A. Lauwerier, A uniform windfield on a rotating sea in presence of a semi-infinite barrier. Report TW 50 (1958), Mathematisch Centrum.

1) Vgl. D. van Dantzig, Einige analytische Ergebnisse über die Bewegung eines untiefen Meeres. Vortrag GaMM 1958.

2) H. A. Lauwerier. l.c.

Halbebene der komplexen z-Ebene ist. Nach Elimination von $G(z)$ entsteht also auf der reellen Achse das Hilbertsche Problem [3])

$$\frac{z^2 + \cos^2\gamma}{\sqrt{1 + z^2}}\, \Phi^+(z) - \Phi^-(z) = \frac{-i}{z + \varepsilon i} \quad \text{(10).}$$

Faktorisierung im Sinne des Wiener-Hopfschen Verfahrens ergibt das einfachere Problem

$$\frac{z + i\cos\gamma}{\sqrt{1 - i z}}\, \Phi^+(z) - \frac{\sqrt{1 + i z}}{z - i\cos\gamma} = f(z) \quad \text{(11),}$$

wo

$$f(z) = \frac{-i\sqrt{1 + i z}}{(z + \varepsilon i)(z - i\cos\gamma)} \quad \text{(12).}$$

Das Problem hat die Lösung

$$\frac{z + i\cos\gamma}{\sqrt{1 - i z}}\, \Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t - z}\, dt\,, \qquad \operatorname{Im} z > 0 \quad \text{(13),}$$

so daß

$$\Phi^+(z) = \frac{\sqrt{1 - i z}}{(z + \varepsilon i)(z + i\cos\gamma)} \quad \text{(14).}$$

Damit sind die Funktionen $F(z)$ und $G(z)$ bekannt. Nach einigen elementaren Umformungen findet man

$$\bar{\zeta}\,(x, y, p) = \frac{1}{2}\,\Psi\left(r, \frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \frac{1}{2}\,\Psi\left(r, \frac{3\pi}{2} - \varphi\right) + \sqrt{1 - \cos\gamma}\;\Psi\,(r, \pi + \gamma - \varphi) \quad \text{(15)}$$

mit

$$\Psi(r, \alpha) = \frac{\overline{W}}{q}\, e^{q r \cos\alpha}\, \operatorname{erfc}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{2 r}\right) \quad \text{(16)}$$

und

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad 0 < \varphi < 2\pi\,.$$

Das hier benutzte Fehlerintegral wird definiert durch

$$\operatorname{erfc} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty} e^{-u^2}\, du \quad \text{(17).}$$

Insbesondere ist für einige einfache Windfelder, z. B. Einheitsfunktion und für $t = 0$ eintretende Sinusfunktion, die Erhöhung am Hindernis betrachtet worden. Die Umkehrung der Laplace Transformierten auf eine Zeitfunktion ist im allgemeinen recht kompliziert. Mit Hilfe von Reihenentwicklungen und asymptotischen Ausdrücken kann man aber gute Resultate erzielen.

[3]) Muskhelishvili, Singular Integral Equations. p. 87. Groningen 1953: Noordhoff.

V/12/6 0,075